

FIG. 1.5 – Force de pression sur un piston de vitesse V sans pertes de charge.

Pendant le temps dt , le travail des forces de pression exercées par l'eau d'un côté et l'air de l'autre est égal à $dW = (P_{brut} - P_a)A dx$ avec $dx = V dt$. Si la pression suivait une loi hydrostatique (alors que le fluide est en mouvement), on pourrait écrire $P_{brut} - P_a = \rho g h_{brut}$.

Sous cette hypothèse hydrostatique, on définit la puissance théorique récupérable en empêchant le piston d'accélérer (mais pas de se mouvoir) qui est

$$\Pi_{theo} = \frac{dW}{dt} = \rho g h_{brut} A V = \rho g h_{brut} Q . \quad (1.6)$$

3.2 Rendement d'une centrale hydroélectrique

En pratique, la puissance récupérable est inférieure à la puissance théorique Π_{theo} . En effet, la pression n'est pas hydrostatique à cause du mouvement du fluide et de son frottement dans les conduites qui induit des "pertes de charge", c'est-à-dire une diminution de la pression $P_{net} < P_{brut}$ au niveau du piston. On définit alors la "hauteur nette" comme étant la hauteur qui générerait la pression nette $P_{net} = P_a + \rho g h_{net}$. La perte de charge dans les conduites est alors $h_f = h_{brut} - h_{net}$. On définit $\eta_{cond} = h_{net}/h_{brut}$, le rendement des conduites.

Dans une centrale hydroélectrique, le piston, présenté ici pour calculer simplement la puissance, est remplacé par une turbine (figure 1.6). Les frottements dans la turbine engendrent également des pertes de charge (η_{turb}). Toutes les pertes de charges hydrauliques, combinées aux rendements mécaniques et électriques de l'alternateur et du transformateur (η_{mec}), sont modélisées par le rendement global η , qui permet d'exprimer la puissance récupérable Π_{rec} à travers la relation

$$\Pi_{rec} = \eta \rho g h_{brut} Q . \quad (1.7)$$

L'ordre de grandeur de ce rendement est $\eta = \eta_{cond} \eta_{turb} \eta_{mec} \sim 0,8$, ce qui conduit à la relation “ $\Pi_{rec}(\text{kW}) = 8 h_{brut}(\text{m}) Q(\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1})$ ” où Π_{rec} est la puissance électrique récupérable exprimée en kW, h_{brut} la hauteur brute exprimée en m et Q le débit exprimé en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

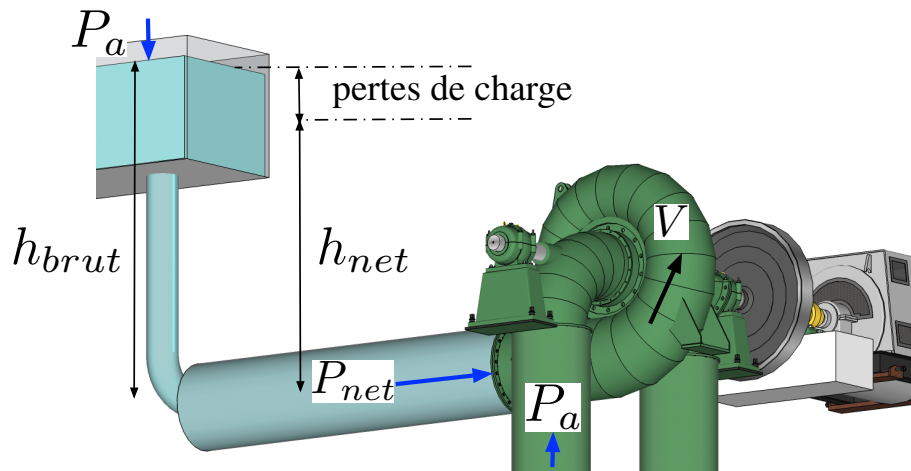


FIG. 1.6 – Turbine alimentée par un réservoir. La hauteur nette h_{net} est celle qui engendrerait la pression P_{net} , mesurée à l’amont de la turbine, si les pertes de charge dans les conduites étaient nulles.

FORMULAIRE

Charge hydraulique hydrostatique

En l’absence de mouvement fluide, la charge hydraulique ne dépend pas de l’espace et s’écrit :

$$H = \frac{P}{\rho g} + Z .$$

Force d'Archimède

Un corps de volume Ω plongé dans un liquide reçoit une poussée verticale égale au poids du volume de liquide déplacé :

$$F_{Arch} = \rho \Omega g .$$

Paradoxe hydrostatique ou principe de Pascal

Une petite force f exercée sur une petite section a d'un liquide confiné exerce une pression $P = f/a$ qui induit une grande force $F = P A$ sur une grande section A , ce qui se traduit par la relation

$$F = f \frac{A}{a} .$$

Puissance récupérable

La puissance électrique récupérable Π_{rec} à partir d'un réservoir situé à une hauteur h_{brut} pour un débit Q est

$$\Pi_{rec} = \eta \rho g h_{brut} Q \quad \text{approximé par} \quad \Pi_{rec} \text{ (kW)} = 8 h_{brut} \text{ (m)} Q \text{ (m}^3 \cdot \text{s}^{-1}\text{)} ,$$

où le rendement $\eta = \eta_{cond} \eta_{turb} \eta_{mec} \sim 0,8$ prend en compte les pertes de charges hydrauliques dans les conduites et dans la turbine, ainsi que les pertes d'énergie dans l'alternateur et le transformateur.

EXERCICES

EXERCICE 1.1 Barrage poids

Un barrage poids de masse volumique ρ_s et de largeur $l = 100$ m retient un plan d'eau de profondeur $h = 9$ m (figure 1.3).

- 1) Calculer la pression $P(Z)$ pour la cote Z ainsi que la pression $P(0)$ au fond du plan d'eau.

Charge hydraulique des écoulements en charge

La charge s'exprime en fonction de la cote Z du centre de la section, de la pression P au centre et de la vitesse débitante V dans la conduite :

$$H = \frac{P}{\rho g} + Z + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad \text{avec} \quad \alpha \sim 1 .$$

Charge hydraulique des écoulements à surface libre

La charge s'exprime en fonction de la pression atmosphérique P_a , de la cote Z_f du fond du canal, de la profondeur y de la lame d'eau et de la vitesse débitante V :

$$H = \frac{P_a}{\rho g} + Z_f + y + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad \text{avec} \quad \alpha \sim 1 .$$

Loi de Darcy

Dans les milieux poreux, la vitesse débitante du fluide V est perpendiculaire aux surfaces de constante charge et s'exprime en fonction de la charge H et de la conductivité hydraulique K_h à l'aide de la relation de pertes de charge :

$$\frac{dH}{ds} = -\frac{V}{K_h} .$$

EXERCICES

EXERCICE 2.1 Écoulement souterrain sous un barrage

Un barrage en béton de largeur $e = 50$ m et de longueur $l = 200$ m, sépare deux plans d'eau de profondeurs respectives $h_a = 11$ m et $h_b = 1$ m. La perméabilité du sol poreux est $K_p = 1$ cm/s.

On considère le segment AB à l'interface entre le pied du barrage et le milieu poreux (figure 2.6). On peut le représenter par l'intervalle $[0, e]$ où e est la largeur du barrage. On considère que la charge varie linéairement de H_a , pour $x = 0$ en A , à H_b , pour $x = e$ en B .

EXERCICES

EXERCICE 4.1 Rendements d'un barrage hydroélectrique

On considère l'écoulement en charge amenant l'eau d'une retenue de cote de surface libre Z_g à une retenue de cote de surface libre Z_v telle que la hauteur brute est égale à $h_{brut} = Z_g - Z_v = 900$ m (voir figure 4.11).

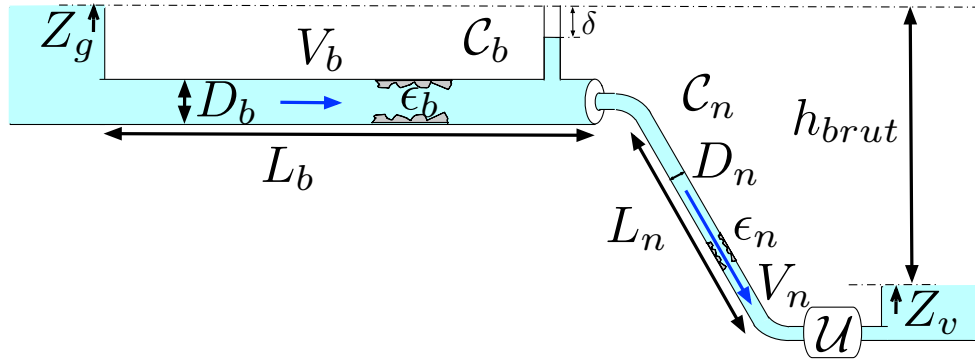


FIG. 4.11 – Barrage hydroélectrique \mathcal{U} et ses galeries et conduites forcées.

On suppose que les conduites, de sections circulaires, sont une galerie souterraine en béton \mathcal{C}_b de longueur $L_b = 7$ km, de diamètre $D_b = 7$ m et de rugosité absolue $\epsilon_b = 2,8$ mm, suivie d'une conduite forcée en acier \mathcal{C}_n de longueur $L_n = 1,5$ km, de diamètre $D_n = 3$ m et de rugosité absolue $\epsilon_n = 2,4$ mm. La galerie et la conduite forcée sont reliées par un rétrécissement brusque, suivi de deux coudes de rayon de courbure $\rho_c = 5$ m et d'angle de déviation $\varphi = \pi/3$. Une cheminée d'équilibre met en contact l'eau de la conduite \mathcal{C}_b avec l'atmosphère au moyen d'une conduite verticale suffisamment haute pour éviter tout débordement. La conduite \mathcal{C}_n alimente une usine hydroélectrique \mathcal{U} dont le rendement des turbines est $\eta_{turb} = 0,93$ et le rendement des alternateurs et transformateurs pour convertir l'énergie mécanique en énergie électrique est $\eta_{mec} = 0,92$. On définit le rendement global η à partir de la puissance électrique récupérable $\Pi_{rec}(Q) = \eta \rho g h_{brut} Q$ où Q est le débit.

- 1) On suppose que la vitesse dans la conduite en acier \mathcal{C}_n est $V_n = 10$ m/s. Calculer le débit Q_{10} dans les conduites \mathcal{C}_n et \mathcal{C}_b .
- 2) Calculer la vitesse V_b dans la conduite \mathcal{C}_b .
- 3) Calculer le coefficient de frottement f_n dans la conduite \mathcal{C}_n .
- 4) Calculer le coefficient de frottement f_b dans la conduite \mathcal{C}_b .
- 5) En déduire la valeur de la somme des pertes de charge linéiques h_f dans les conduites.

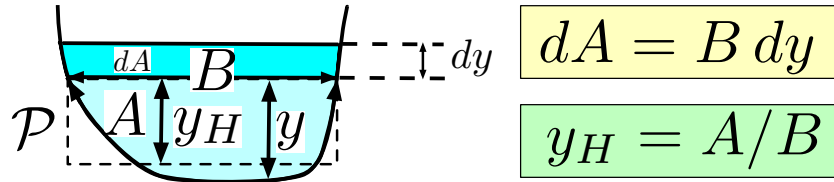


FIG. 5.4 – Variation de la section A en fonction de la largeur miroir B et de la variation de la profondeur y .

Comme le débit $Q = VA$ est constant et que la variation $dA = B dy$ de la section fait intervenir la largeur miroir B (voir figure 5.4) on peut écrire

$$d(V^2) = d\left(\frac{Q^2}{A^2}\right) = -2\frac{Q^2}{A^3} dA = -2V^2 \frac{B}{A} dy. \quad (5.7)$$

On définit alors $y_H = A/B$ la profondeur hydraulique qui permet d'écrire

$$d\left(\frac{V^2}{2g}\right) = -Fr^2 dy \quad \text{avec} \quad Fr = \frac{V}{\sqrt{gy_H}}. \quad (5.8)$$

Comme B et A ne dépendent que de y , il en va de même de Fr pour un débit Q fixé. Il existe alors une (rarement plusieurs) profondeur $y_c(Q)$, dite profondeur critique, pour laquelle $Fr = 1$.

2.2 Régime torrentiel ou fluvial

La variation du terme d'énergie cinétique $V^2/(2g)$ de la charge hydraulique étant reliée par l'équation (5.8) à la variation de la profondeur y et au nombre de Froude Fr , la dérivation de l'équation (5.6), exprimant la charge hydraulique H , conduit à :

$$(1 - Fr^2) dy = -dZ_f + dH. \quad (5.9)$$

À l'approche d'un obstacle tel que $dZ_f > 0$ ou en présence d'un frottement qui induit une perte de charge $dH < 0$, on distingue deux régimes :

- $Fr > 1$: la profondeur y **augmente**, le régime est dit torrentiel.
- $Fr < 1$: la profondeur y **diminue**, le régime est dit fluvial.

D'une manière plus générale, la variation de la profondeur $y(s)$ avec la coordonnée curviligne s le long de l'écoulement est donnée par l'importante équation de l'hydraulique stationnaire issue de l'équation (5.9) :

$$\frac{dy}{ds} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}, \quad (5.10)$$

régime torrentiel ($y_1 < y_c$) vers un régime fluvial ($y_c < y_2$). Il en va de même pour un ressaut mobile à condition de définir les notions de régimes torrentiel et fluvial relatif à son repère. Pour cela, on définit le nombre de Froude relatif au repère du ressaut par la relation $Fr_n = V_n/\sqrt{g y}$.

1.2 Perte de charge à travers un ressaut immobile

On s'intéresse ici au cas d'un ressaut immobile ($W = 0$), souvent rencontré en aval d'une forte pente ou d'une vanne de fond. Les relations de saut s'écrivent alors

$$y_1 V_1 = y_2 V_2 \quad \text{et} \quad y_1 V_1^2 + \frac{1}{2} g y_1^2 = y_2 V_2^2 + \frac{1}{2} g y_2^2. \quad (6.3)$$

Comme $\mathcal{I}(q, y_1) = \mathcal{I}(q, y_2)$ où $q = y_1 V_1 = y_2 V_2$ est le débit linéique, on dit que y_1 et y_2 sont conjugués pour l'impulsion \mathcal{I} . La figure 6.2a représente $\mathcal{I}(q, y) = q^2/y + \frac{1}{2} g y^2$ en fonction de y pour plusieurs valeurs de q .

On s'intéresse alors à la variation de la charge $H = P_a/(\rho g) + Z_f + y + V^2/(2g)$ où Z_f est la cote du fond. On définit alors la "charge spécifique" par la fonction $\mathcal{E}(q, y) = y + V^2/(2g) = y + q^2/(2g y^2)$.

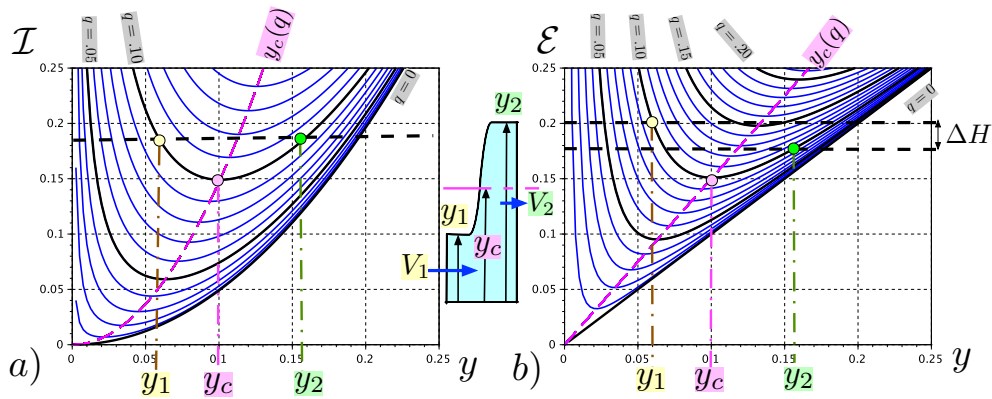


FIG. 6.2 – Valeurs de l'impulsion $\mathcal{I}(q, y)$ et de la charge spécifique $\mathcal{E}(q, y)$ autour d'un ressaut hydraulique immobile. Valeurs de q par pas de $0,01 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

En utilisant les relations de saut (6.3), on peut montrer (simple calcul) que la perte de charge (comptée négativement) à travers le ressaut s'écrit

$$\Delta H = H_2 - H_1 = \mathcal{E}(q, y_2) - \mathcal{E}(q, y_1) = \frac{(y_1 - y_2)^3}{4 y_1 y_2} < 0, \quad (6.4)$$

ce qu'illustre la figure 6.2b. On constate que les particules fluides doivent transiter du régime torrentiel $y_1 < y_c$ vers le régime fluvial $y_c < y_2$ et non

propage vers l'amont et une intumescence qui se propage vers l'aval. Dans le cas torrentiel $Fr > 1$, toutes les intumescences se propagent vers l'aval.

Notons enfin que, si $V_0/c \ll 1$, on peut considérer qu'une fermeture des vannes et un arrêt des turbines $dV = -V_0$ conduisent à une petite perturbation $dy = -y_0 V_0/c$ avec un petit ressaut de célérité $-c$ qui se propage vers l'amont à la rencontre d'une petite onde de détente de célérité c qui se propage vers l'aval.

3 Coup de bélier

3.1 Vitesse des ondes élastiques

Comme pour les écoulements à surface libre, des variations de débits dans les écoulements en charge sont accompagnées de transitoires similaires aux compressions et détentes que l'on vient de décrire. Les variations de profondeurs y des écoulements à surface libre sont remplacées par des variations de sections, dues à l'élasticité des conduites métalliques et à la compressibilité de l'eau. Ces variations se traduisent par des variations de la pression et de la masse volumique de l'eau, qui vont se propager vers l'amont ou vers l'aval de l'écoulement. On parle alors d'ondes élastiques appelées "coups de bélier" dans les conduites et "oscillations de masse" dans les galeries ou les cheminées d'équilibre.

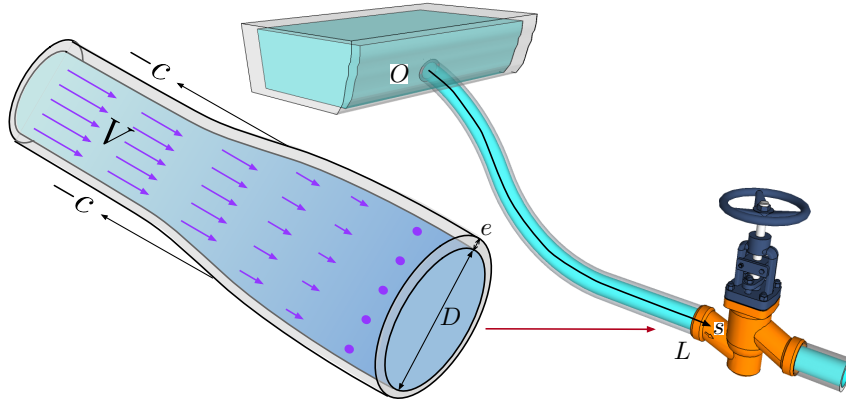


FIG. 6.6 – Fermeture d'une vanne et coup de bélier.

Par exemple, si on ferme une vanne d'un écoulement en charge, il se forme une surpression en amont de la vanne qui va dilater la section de la conduite

et comprimer l'eau (figure 6.6). Cette surpression va se propager vers l'amont avec une célérité c .

Un calcul théorique prenant en compte le module d'élasticité du fluide E_f et le module d'élasticité E_m du matériau de la conduite, de diamètre D et d'épaisseur e , permet d'exprimer la célérité c des ondes élastiques couplées entre le fluide et le solide sous la forme

$$c = \left(\frac{E_c}{\rho_0} \right)^{1/2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{E_c} = \frac{1}{E_f} + \frac{k D}{e E_m}, \quad (6.10)$$

où ρ_0 est la masse volumique du fluide et $k \in [0, 8; 1]$ une constante qui dépend de la jonction latérale des conduites. Comme on a $E_f \sim 2 \cdot 10^9$ Pa pour l'eau et $E_m \in [0, 2; 16] \cdot 10^9$ Pa pour les conduites usuelles, la célérité est de l'ordre de $c \sim 1000$ m/s.

La formule d'Allievi permet de calculer rapidement la célérité à l'aide de la formule $c = 9990 (48, 3 + r D/e)^{-1/2}$ m/s où $r \in \{0, 5; 1, 0; 4, 4; 5\}$ pour les matériaux {acier, fonte, amiante-ciment, plomb et béton}.

3.2 Variations de débits brusques ou progressives

De même qu'une variation de vitesse dV engendre une variation de profondeur $dy = y_0 dV/c$ pour les écoulements à surface libre, où c est la célérité des petites intumescences, une variation de vitesse moyenne dans un écoulement en charge engendre une variation de masse volumique $d\rho = \rho_0 dV/c$, où c est la célérité des ondes élastiques. Comme la variation de pression dP est liée à la variation de masse volumique $d\rho$ par la relation $dP = c^2 d\rho$, on peut écrire $dP = \rho_0 c dV$.

Pour illustrer le phénomène de coup de bélier qui résulte de la propagation et de la réflexion de ces ondes élastiques, on considère une conduite de longueur L comprise entre un grand réservoir et une vanne responsable d'une variation de vitesse dV_{max} (figure 6.6). Le blocage total de l'écoulement $dV_{max} = -V_0$ reste dans le cadre des petites perturbations $d\rho/\rho_0 \ll 1$ dans la mesure où l'on a toujours $V_0/c \ll 1$ pour les écoulements usuels.

Le réservoir de grande taille impose une pression à sa jonction avec la conduite, ce qui se traduit par une réflexion vers l'aval des ondes de pression qui remontent vers l'amont. Comme $V_0 \ll c$ pour les écoulements usuels, on peut considérer que l'onde élastique générée au niveau de la vanne met un temps $T = L/c$ pour remonter jusqu'au réservoir et le même temps pour revenir à son point de départ.

On suppose que la variation de vitesse, de V_0 à $V_0 + dV_{max}$ au niveau de la vanne se fait progressivement pendant un temps t_f , par exemple avec une variation linéaire $dV(t) = dV_{max} t/t_f$.

Si $t_f < 2T = 2L/c$ on dit que la variation est “brusque”. On parle alors de coup de bélier non amorti ou encore, selon une ancienne dénomination, de “coup de bélier d’onde”. Dans ce cas, la variation de pression dP atteint la valeur $dP_{max} = \rho_0 c dV_{max}$ avant que l’onde élastique n’ait eu le temps de revenir (figure 6.7). La variation de charge correspondante est donnée par la formule de Joukovski $dH_{max} = dP_{max}/(\rho_0 g) = c dV_{max}/g$.

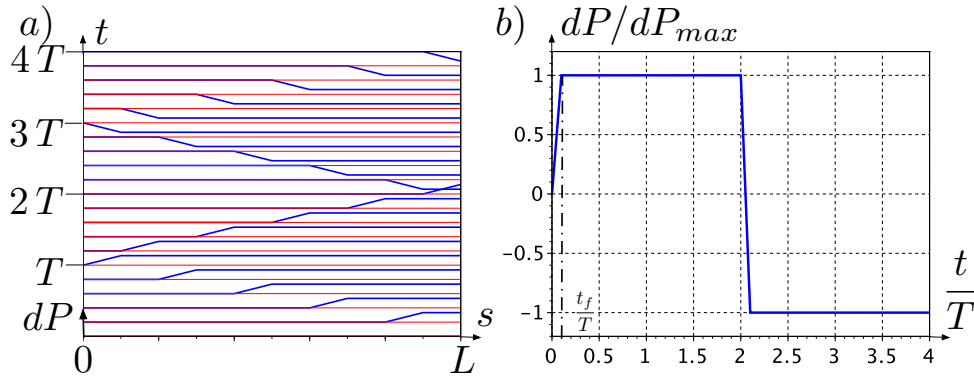


FIG. 6.7 – Propagation d’une perturbation de pression $dP(s,t)$ dans une conduite de longueur L dans le cas d’une variation brusque $t_f < 2L/c$.

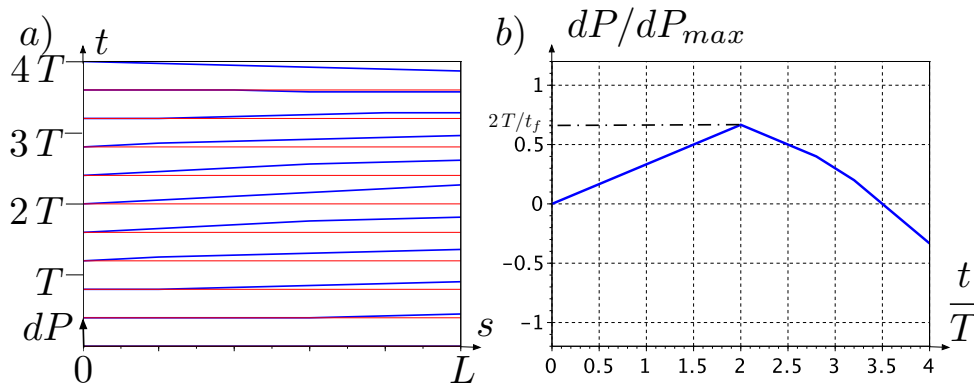


FIG. 6.8 – Propagation d’une perturbation de pression $dP(s,t)$ dans une conduite de longueur L dans le cas d’une variation progressive $t_f > 2L/c$.

Si $t_f > 2T = 2L/c$, on dit que la variation est “progressive”. On parle alors de coup de bélier amorti ou encore, selon une ancienne dénomination, de “coup de bélier de masse”. Dans ce cas, l’onde élastique a eu le temps de faire un

FORMULAIRE

Relation de saut pour un ressaut

La conservation de la masse et de la quantité de mouvement en présence d'un ressaut mobile, de célérité W , **entraînement** :

$$y_1(V_1 - W) = y_2(V_2 - W) \quad \text{et} \quad y_1(V_1 - W)^2 + \frac{1}{2}g y_1^2 = y_2(V_2 - W)^2 + \frac{1}{2}g y_2^2 .$$

Conservation de l'impulsion

Les relations de saut à travers un ressaut entraînent la conservation de l'impulsion \mathcal{I} qui s'écrit

$$\mathcal{I}(q_n, y_1) = \mathcal{I}(q_n, y_2) ,$$

avec $q_n = y_1(V_1 - W) = y_2(V_2 - W)$ et $\mathcal{I}(q, y) = q^2/y + \frac{1}{2}g y^2$.

Perte de charge à travers un ressaut stationnaire

La perte de charge (**comptée négativement**) d'une particule qui traverse un ressaut stationnaire est

$$\Delta H = \frac{(y_1 - y_2)^3}{4 y_1 y_2} < 0 .$$

Onde de détente

La conservation de la masse et de la quantité de mouvement en présence d'une onde de détente, de célérités W_1 et W_2 , entraîne :

$$W_1 = V_1 - \epsilon \sqrt{g y_1} , \quad W_2 = V_2 - \epsilon \sqrt{g y_2}$$

et $V_1 + 2\epsilon \sqrt{g y_1} = V_2 + 2\epsilon \sqrt{g y_2}$ avec $\epsilon = \pm 1$.

la perte de charge singulière à l'entrée du tuyau, induit une perte de charge $h_s = K V^2 / (2g)$ avec $K = 0,5$ (voir Figure 4.6), si bien que la comparaison des charges entre les points M_1 et M_2 s'écrit maintenant $h - h_s = V^2 / (2g)$. On en déduit que $V = C_v \sqrt{2gh}$ avec $C_v = 1 / \sqrt{1,5} = 0,82$. Comme $A_{contra} = A$ en raison de la forme du tuyau, on en déduit $\mu = C_v = 0,82$.

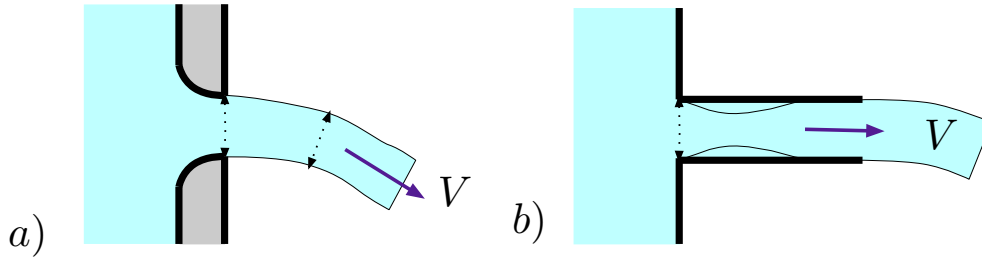


FIG. 7.3 – a) Orifice à paroi moulée. b) Orifice avec ajutage sortant.

1.2 Débit à travers des déversoirs

On cherche à déterminer le débit à travers un déversoir de section rectangulaire (figure 7.4a) ou triangulaire (figure 7.4c), appelé “seuil en V”. On suppose que l'épaisseur de la paroi est petite devant le tirant d'eau H_t (figure 7.4b) : on dit alors que le seuil est à paroi mince. On note L la largeur du déversoir mesurée sur la surface libre.

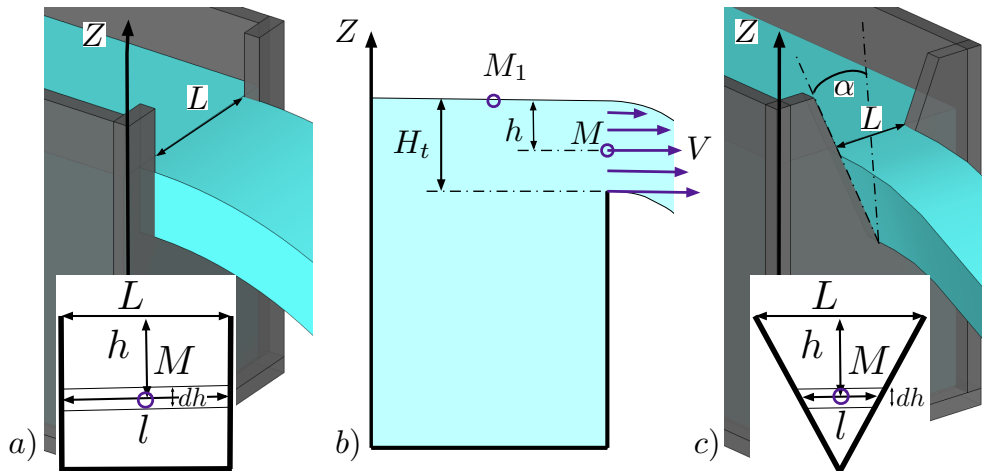


FIG. 7.4 – Débit à travers un déversoir rectangulaire ou en V.

On considère un point M_1 situé sur la surface libre et les points M situés au-dessus du seuil à des profondeurs h variant de 0 à H_t . Le débit théorique à

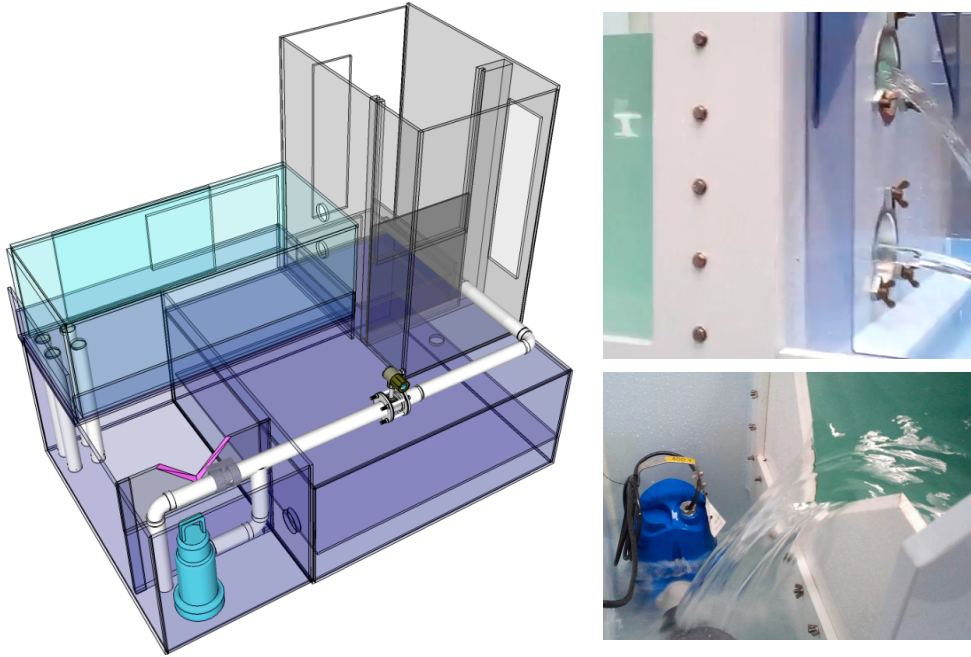


FIG. 7.5 – Maquette orifices et ajutages.

travers le déversoir peut être calculé en considérant un empilement de petits orifices de largeurs l , de hauteur dh et donc d'aire $dA = l dh$, centrés en plusieurs points M . Dans le cas d'un seuil rectangulaire, on a $l = L$ tandis que l'on a $l(h) = L (H_t - h)/H_t$ dans le cas d'un seuil en V.

Le débit théorique à travers un petit orifice est $dQ_{theo} = \sqrt{2gh} dA$. En intégrant entre $h = 0$ et $h = H_t$ on calcule alors le débit théorique total $Q_{theo} = \int_0^{H_t} dQ_{theo} = \int_0^{H_t} l(h) \sqrt{2gh} dh$ qui vaut $Q_{theo} = \frac{2}{3} L \sqrt{2g} H_t^{3/2}$ dans cas du seuil rectangulaire et $Q_{theo} = \frac{4}{15} L \sqrt{2g} H_t^{3/2}$ dans cas du seuil en V. Pour obtenir le débit réel $Q = \mu Q_{theo}$, il faut introduire un coefficient μ qui ne peut être déterminé qu'expérimentalement.

Dans le cas d'un seuil rectangulaire à paroi mince de largeur L , le débit Q_{rect} est donc relié au tirant d'eau H_t par la formule

$$Q_{rect} = \mu_{rect} L \sqrt{2g} H_t^{3/2} \quad \text{avec} \quad \mu_{rect} = 0,415. \quad (7.4)$$

Dans le cas d'un seuil en V, il est plus pratique d'utiliser le demi-angle α du sommet du triangle dont la tangente est égale à $\tan \alpha = L/(2H_t)$. Le débit Q_{tria} est donc relié au tirant d'eau H_t par la formule

$$Q_{tria} = \mu_{tria} \frac{8}{15} \tan \alpha \sqrt{2g} H_t^{5/2} \quad \text{avec} \quad \mu_{tria} = 0,58. \quad (7.5)$$

1.3 Maquette orifices et ajutages

Dans le but d'illustrer la détermination expérimentale des coefficients μ intervenant dans les expressions des débits à travers des orifices et des déversoirs, deux maquettes hydrauliques ont été fabriquées pour des travaux pratiques à Toulouse et à Grenoble (voir [20]). De dimensions ($X = 2\text{m}, Y = 3\text{m}, Z = 3\text{m}$) environ, le système fonctionne en circuit fermé avec environ 4 m^3 d'eau circulant à un débit pouvant atteindre environ $16\text{ l/s} \sim 60\text{ m}^3/\text{h}$ (figure 7.5).

Trois types de seuils en V, avec $\tan\alpha \in \{1, 1/2, 1/4\}$, ont été étalonnés ($\mu_{tria} \sim 0,6$) de manière à déterminer le débit à travers des orifices et ajutages de sections et de formes différentes (figure 7.6). Cette mesure est préférable à celle du débitmètre qui met en évidence des variations de débit de l'ordre de 5%, ce qui est naturel en présence d'une pompe proche de la cavitation.

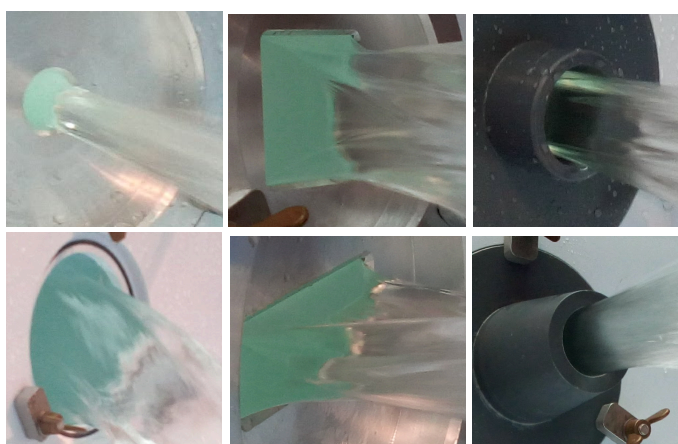


FIG. 7.6 – Exemples d'orifices et ajutages de formes diverses.

2 Courbes caractéristiques

2.1 Courbe caractéristique d'un réseau en charge

On s'intéresse ici à un réseau hydraulique que l'on souhaite alimenter à l'aide d'une pompe. On note M_e le point d'entrée du réseau (et donc de sortie de la pompe), de charge hydraulique H_e , et M_s le point de sortie du réseau (et donc d'entrée de la pompe), de charge hydraulique H_s . On note $\Delta H_{reso} = H_e - H_s$ la différence de charge du réseau.

Si le réseau est partout en charge (figure 7.7a), on a $\Delta H_{reso} = h_f + h_s$ où

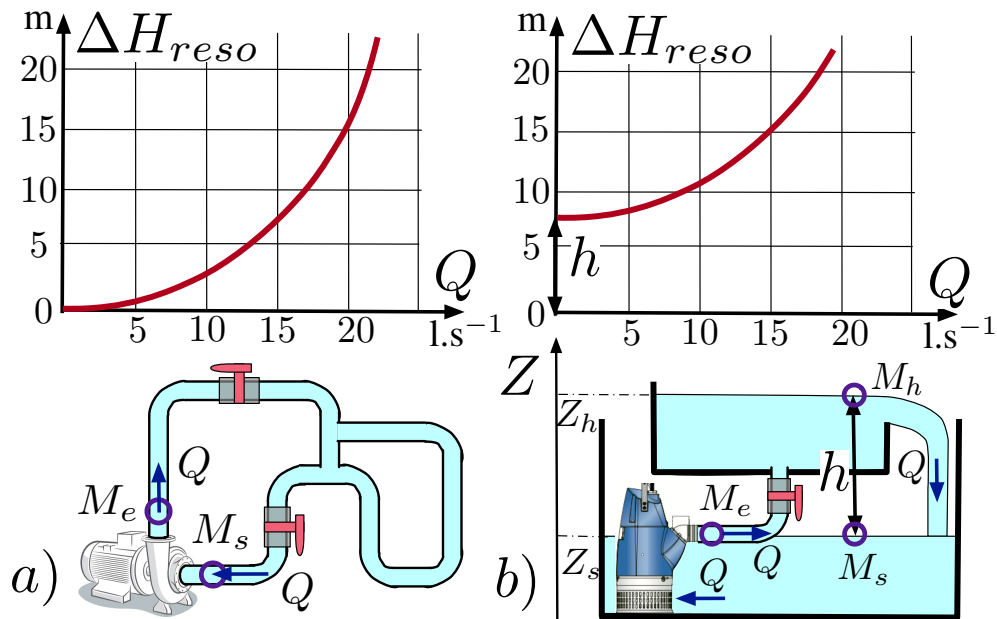


FIG. 7.7 – Courbe caractéristique $\Delta H_{reso}(Q)$ d'un réseau hydraulique aux bornes d'une pompe. a) Réseau en charge. b) Réseau avec surface libre.

h_f désigne la perte de charge due aux pertes de charge linéiques et h_s les pertes de charge singulières. Les formules du chapitre 4 montrent que la courbe caractéristique $\Delta H_{reso}(Q)$, qui relie ces pertes de charge au débit Q , est une fonction croissante qui ressemble à une parabole (figure 7.7a).

Si le réseau comporte une surface libre située à une hauteur h au-dessus de la pompe, on note M_h un point de cette surface, de coordonnée verticale Z_h . Pour simplifier, on suppose que M_s est un point d'une surface libre de coordonnée verticale $Z_s = Z_h - h$ (figure 7.7b). Les charges hydrauliques des points M_h et M_s sont donc respectivement $H_h = \frac{P_a}{\rho g} + Z_h$ et $H_s = \frac{P_a}{\rho g} + Z_s$ où P_a est la pression atmosphérique. On écrit alors que $\Delta H_{reso} = H_e - H_s = (H_e - H_h) + (H_h - H_s)$ où $H_e - H_h = h_f + h_s$ est la somme des pertes de charge linéiques et singulières de la partie en charge du réseau et $H_h - H_s = Z_h - Z_s = h$. La courbe caractéristique $\Delta H_{reso}(Q) = h_f + h_s + h$ a donc la forme d'une parabole translatée d'une hauteur h (figure 7.7b).

2.2 Courbe caractéristique d'une pompe

La courbe caractéristique $\Delta H_{pomp}(Q) = H_e - H_s$ d'une pompe est la fonction qui exprime la charge fournie par la pompe en fonction du débit qui la tra-

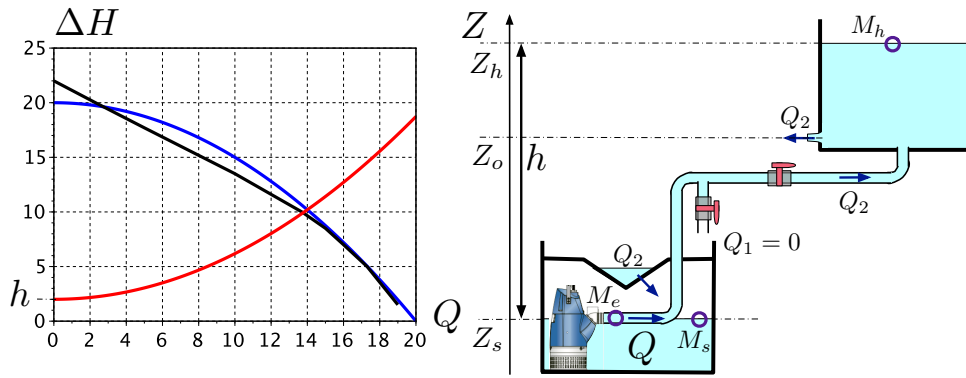


FIG. 7.11 – Courbe caractéristique de la pompe (noire) et de son approximation (bleue). Courbe caractéristique du réseau (rouge) dans le cas $Q_1 = 0$.

Corrigé 7.1 Maquette orifices et ajutages

1) Les pertes de charge singulières sont de la forme $K V^2/g$ et sont donc bien proportionnelles au carré du débit. En supposant les écoulements rugueux, le coefficient de frottement f ne dépend pas de la vitesse et la formule de Darcy-Weisbach conduit à une perte de charge linéique proportionnelle au carré de la vitesse et donc au carré du débit. 2) Comme l'orifice est situé à une profondeur $h_o = Z_h - Z_o = 1$ m, on a $Q_2 = \mu A \sqrt{2g h_o}$ avec $\mu = 0,59$ est $A = \pi D^2/4$, ce qui conduit à $Q_2 = 14$ l/s. 3) Comme $Q_2 = \mu_{tria} \frac{8}{15} \tan \alpha \sqrt{2g} H_t^{5/2}$ avec $\mu_{tria} = 0,58$, on en déduit : $H_t = [15 Q_2 / (8 \mu_{tria} \sqrt{2g})]^{2/5} = 16$ cm. 4) La figure 7.11 montre que la formule proposée est une approximation raisonnable. 5) Comme $\Delta H_{pompe}(Q_2) = H_p [1 - (Q_2/Q_m)^2]$ et $\Delta H_{reso}(Q_2) = h + \alpha_2 Q_2^2$, le point de fonctionnement est obtenu en résolvant $\Delta H_{pompe}(Q_2) = \Delta H_{reso}(Q_2)$ ce qui conduit à l'équation $H_p [1 - (Q_2/Q_m)^2] = h + \alpha_2 Q_2^2$. On en déduit $\alpha_2 = (H_p - h)/Q_2^2 - H_p/Q_m^2 = 4,2 \cdot 10^4 \text{ m}^{-5} \cdot \text{s}^2$. La charge délivrée par la pompe est $\Delta H_{pompe}(Q_2) = 10,2$ m. 6) La charge $\Delta H_{pompe}(Q)$ délivrée par la pompe est égale à $h + \alpha_2 Q_2^2$ ainsi qu'à $\alpha_1 Q_1^2$ avec $Q = Q_1 + Q_2$. On en déduit $H_p [1 - (Q/Q_m)^2] = h + \alpha_2 Q_2^2$ ce qui entraîne $Q = Q_m \sqrt{1 - (h + \alpha_2 Q_2^2)/H_p} = 16,6$ l/s et donc $\Delta H_{pompe}(Q) = H_p [1 - (Q/Q_m)^2] = 6,2$ m. Comme $\Delta H_{pompe}(Q) = \alpha_1 Q_1^2$ avec $Q_1 = Q - Q_2 = 6,6$ l/s, on en déduit $\alpha_1 = 14 \cdot 10^4 \text{ m}^{-5} \cdot \text{s}^2$.

NOTATIONS

A	Aire d'une section (m^2)
dA	Petit élément d'aire (m^2)
A	Aire contractée (m^2)