Deuxième semaine de travail : Calcul Intégral

QCM de cours

Ce QCM sert à vous autoévaluer sur votre assimilation du cours de la semaine 2 sur l'intégration au sens de Lebesgue. Il se compose de questions traitant des formules fondamentales du cours. Elles sont directement liées au cours et ne nécessitent pas de calcul.

1- Lequel de ces trois ensembles est négligeable ?

A - L'intervalle $I = [0, 1]$

B - Une réunion infini de points

C - Une réunion infini mais dénombrable de points

2- Lequel de ces trois ensembles **n'est pas négligeable** ?

A - $E = \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad \cos x = 0\}$

B - $F = \left\{x \in \mathbb{R} \quad / \quad \mathbb{I}_{[0,+\infty]}(x) = 0\right\}$

C - $G = \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad (x - a)(x - b) = 0\}$

3- Que signifie pour une propriété d'être *vraie presque partout sur un intervalle I* ?

A - qu'elle est vraie sur tout I sauf sur un sous-intervalle de petite taille

B - que l'ensemble des points pour lesquels elle n'est pas vraie est de mesure nulle

C - qu'elle est vraie pour tout les points de l'intervalle sauf un.

4- Soit f une fonction positive définie sur $\mathbb{R}$. Si $\int_{IR} |f(x)|\, dx = 0$ alors

A - on ne peut rien conclure

B - $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

C - $f(x) = 0$ *p.p.*

5- Soit une fonction f a valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Dire que f est intégrable signifie :

A - $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 0$

B - $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx < \infty$

C - $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty$

6- Qu'est-ce que l'ensemble $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$:

A - L'ensemble des fonctions integrables sur $\mathbb{R}$

B - L'ensemble des fonctions de carré integrable sur $\mathbb{R}$

C - L'ensemble des fonctions positives sur $\mathbb{R}$

7- Soit une fonction f à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et g une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Si on a $|f(x)| \leq g(x)$ pp alors on peut conclure que :

A - f est nulle

B - f est intégrable

C - f est positive

8- Soit une suite de fonctions (f_n) dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. La suite (f_n) converge vers f dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ssi

A - $\underset{n\to\infty}{lim} \int_{\mathbb{R}} (f_n(x) - f(x))\, dx = 0$

B - $\underset{n\to\infty}{lim} (f_n(x) - f(x)) = 0 \;$ pour $x \in \mathbb{R}$

C - $\underset{n\to\infty}{lim} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0$

9- Laquelle de ces fonctions n'appartient pas a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$:

A - $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

B - $f(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$

C - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in]0, +1[$

10- Qu'est-ce que l'ensemble $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$:

A - L'ensemble des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$

B - L'ensemble des fonctions de carré integrable sur $\mathbb{R}$

C - L'ensemble des fonctions positives sur $\mathbb{R}$

11- Soit f et g, deux fonctions appartenant a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, alors le produit fg appartient a :

A - $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

B - on ne peut rien en dire

C - $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

12- Pour pouvoir appliquer le théorème de la Convergence Dominée, il faut que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge presque partout vers la fonction f et que

A - $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g_n(x)$, avec $g_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

B - $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout x, avec $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

C - $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p, avec $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

13- Supposons que les deux hypothèses du théorème de la Convergence Dominée sont vérifiées, nous avons alors comme conclusion que la limite f est intégrable et que

A - $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

B - $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ simplement

C - $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ uniformément

Dans ce qui suit, les notations pour une intégrale dépendant d'un paramètre sont celles du cours à savoir :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x)\, dx \quad \forall x \in D_F$$

i.e. on intégre par rapport à la variable x et le paramètre est t.Il doit être bien clair, que ces deux quantités ne jouent pas le même rôle, ce que nous illustrons dans les questions qui suivent.

14- Soit t_0 un point appartenant au domaine de definition, D_F d'une intégrale dépendant d'un paramètre, notée F. Supposons que les hypothèses du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre soient vérifiées, nous avons alors comme conclusion que F est

A - continue en t_0

B - derivable en t_0

C - continue sur D_F

15- Dans le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre la première hypothèse impose que $f(t,x)$ soit continue

A - par rapport à x et par rapport à t

B - en x pour presque tout t

C - en t pour presque tout x

16- La première hypothèse du théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre en t_0 est que la fonction f soit dérivable par rapport à t_0 pour presque tout x. La deuxième, quant à elle, est :

A - $\exists\ g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \leq g(t) \quad$ (p.p.t. t)

B - $\exists\ g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $\forall t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\quad \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \leq g(t) \quad$ (p.p.t. t)

C - $\exists\ g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $\forall t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\quad \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right| \leq g(x) \quad$ (p.p.t. x)